

多循环频率循环时延估计方法及性能分析

黄知涛,姜文利,周一宇

(国防科技大学电子科学与工程学院,湖南长沙 410073)

摘 要: 由于单循环频率循环估计子估计性能对循环频率的选择有较大的依赖性,使其在实际应用中受到了较大的限制.为解决该问题,文章研究并给出了多循环频率循环时延估计方法,还详细推导得到了多循环频率估计子组的估计均方误差.在平稳高斯白噪声和慢变化时变高斯白噪声条件下对 BPSK 和 QPSK 信号的仿真结果表明,较高信噪比时(SNR > -6dB)循环估计子组的估计理论精度与仿真精度基本上是一致的,并且三循环频率循环估计子组估计性能要优于双循环频率循环估计子组,而双循环频率循环估计子组的估计性能要优于单循环频率循环估计子.仿真结果充分说明了文章理论分析的正确性,也说明了多循环频率循环时延估计方法的有效性及其估计算子的稳健性.

关键词: 循环估计子;多循环频率估计子组;时延估计;估计精度

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 01-0102-07

Multi-Cycle Time-Delay Estimator and Its Performance Analysis

HUANG Zhi-tao, JIANG Wen-li, ZHOU Yi-yu

(School of Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha, Hunan 410073, China)

Abstract: Single-cycle time-delay estimator suffers from the dependence on the selection of different cycle frequencies, which restricts its practical usage. To solve the problem, multi-cycle time-delay estimation method is discussed. And the estimation accuracy for multi-cycle estimator is also given. Simulation results based on BPSK and QPSK signals with stationary noise and slowly time-variant noise show that estimation theoretical accuracy is just the same as the simulation one with high SNR (> -6dB), and double-cycle estimator performs worse than tri-cycle estimator, but better than single-cycle estimator, which indicates the efficiency and robustness of the given method as well as the exactness of the accuracy analysis.

Key words: cycle estimator; multi-cycle estimator; time-delay estimation; estimation accuracy

1 引言

利用信号的循环平稳性进行信号处理已经在许多方面得到了广泛的应用,如雷达信号检测、天线波束形成、信号参数估计及系统辨识^[1]等.与传统的信号处理方法相比,循环平稳信号处理方法能够适应不同特性噪声信号环境,具有抗干扰及信号选择的能力,这为设计性能优良稳健的信号处理算法提供了基础^[1,7,8].

早在 80 年代中期,William A. Gardner 教授就研究并发表了利用信号循环平稳性进行信号时延估计的论文^[2,3],在此基础上作者对文献^[2,3]的适用条件做了进一步的推广,研究并给出了基于循环互模糊函数的时延和多普勒联合估计方法^[4].但是上述两种时延估计方法都存在本质上的缺陷,那就是对信号谱相关信息利用不足.因为文献^[2~4]的循环时延估计方法实质上都是单循环频率估计方法,而循环平稳信号的循环频率通常是不唯一的^[5].基于上述考虑,本文主要研究多循环频率循环时延估计方法,并就估计性能进行详细的理论分析和仿真分析.

2 单循环频率循环估计子的局限性

时延估计的信号模型可简写成下面的形式

$$x(t) = s(t) \tag{1}$$

$$y(t) = as(t - D) + n(t) \tag{2}$$

其中, $s(t)$ 为本地辐射信号, a 表示回波信号相对于发射信号的幅度衰减因子, $n(t)$ 为零均值高斯白噪声,且与信号 $s(t)$ 是互不循环相关的; D 为回波信号相对于发射信号的时延.

文献^[4]中研究得到的单循环频率循环时延估计方法如下式所示

$$(u = \hat{D}) = \arg \left[\max_u |C_{y,x}(u, 0)| \right] \tag{3}$$

其中

$$|C_{y,x}(u, 0)| \triangleq \left| \int R_{y,x}(\tau) (R_x(\tau - u))^* d\tau \right| \tag{4}$$

或者也可以通过下面的形式得到时延估计值^[4]

$$\left[\frac{\partial |C_{y,x}(u, 0)|^2}{\partial u} \right]_{u=\hat{D}} = 0 \tag{5}$$

其中, $R_{y,x}(\tau)$ 是信号 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在循环频率 τ 处的循环自

相关函数^[1,5].

如式(43)所示,上述单循环频率循环时延估计方法的估计精度为(见附录证明)

$$\frac{2}{b} \frac{k}{8 T^2 (2 a^2 / N_0) B^2 s(0)} \quad (6)$$

由式(6)知道,单循环频率循环估计子的估计精度与所选用的循环频率是有关的.通常,循环平稳信号的循环频率是不唯一的,这使得单循环频率循环估计子在进行信号时延估计时存在如下两个问题:一,对于不同的信号事先究竟该如何选择最佳的循环频率;二,只利用单个循环频率,其他循环频率处信号信息被丢失.这两个问题使得单循环频率循环时延估计方法在实际应用中受到了很大的制约,解决上述两点问题的一个有效途径就是研究多循环频率循环时延估计方法.

3 多循环频率循环时延估计方法及估计精度

作者在文献[5]研究循环相关匹配滤波器组时已经得到结论:多个单循环频率循环相关匹配滤波器组成滤波器组时对应的权值取为相等才能使输出信噪比达到最大.在进行参数估计时可以借鉴这一结论.

将各单循环频率循环估计子(如式(4)所示)等权相加,定义变量 $C_{y,x}(u)$ 如下所示

$$C_{y,x}(u) \triangleq \frac{1}{i} C_{y_i^i,x}(u,0) = \frac{1}{i} R_{y_i^i,x}(u) (R_{s_i^i}(u - D))^* d \quad (7)$$

其中, i 是信号 $x(t)$ 的循环频率集,包括零元素.将式(1)、(2)代入到式(7)

$$C_{y,x}(u) = \frac{1}{i} \left[a e^{-j P} R_{s_i^i}(u - D) (R_{s_i^i}(u - u))^* d + R_{n_i^i}(u) (R_{s_i^i}(u - u))^* d \right] \triangleq \left[a e^{-j P} s_i(u - D) + n_i(u) \right] \quad (8)$$

当不存在干扰时有

$$C_{y,x}(u) = \frac{1}{i} \left[a e^{-j P} R_{s_i^i}(u - D) (R_{s_i^i}(u - u))^* d \right] \quad (9)$$

从而有

$$\begin{aligned} |C_{y,x}(u)| &= \left| a e^{-j P} R_{s_i^i}(u - D) (R_{s_i^i}(u - u))^* d \right| \\ &\leq |R_{s_i^i}(u - D)|^2 d \end{aligned} \quad (10)$$

上式中 等号成立的条件是^[4]

$$u = D \quad (11)$$

这说明,时延值可通过如下方法得到

$$(u = D) = \arg \max_u |C_{y,x}(u)| \quad (12)$$

上式也可等价写成下面的形式

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} |C_{y,x}(u)|^2 \right]_{u=D} = 0 \quad (13)$$

式(12)、(13)给出了多循环频率循环时延估计方法.

有噪声干扰时,通过式(12)、(13)只能得到对时延真实值 D 的一个估计 D

$$(u = D) = \arg \max_u |C_{y,x}(u)| \quad (14)$$

或者

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} |C_{y,x}(u)|^2 \right]_{u=D} = 0 \quad (15)$$

在附录中给出了双循环频率循环估计子组估计理论精度的严格数学推导过程和解析表式,并由此直接得到了单/三循环频率循环估计子(组)的估计理论精度,对于高于三个循环频率的情况也可通过同样的推导过程得到,在此不再赘述.

要比较单循环频率循环估计子与多循环频率循环估计子组的估计性能只需要直接比较它们对应的估计均方误差即可.然而,由于在计算式(42)、(43)均方误差之差时所包含的参量多,并且各参量之间的相对大小关系不确定,通过直接取差运算不能直观地知道两个估计均方误差的大小.下面以典型 BPSK 信号为例计算这两个估计均方误差的具体值,从而对二者的大小关系有一个直观的了解.

下表给出了对典型 BPSK 信号时延估计理论精度(分别由式(42)、(43)给出)的计算结果.其中,采样间隔 $T_s = 10^{-7} s$, 回波信号真实时延 D 为 $18 T_s$, 信号载频为 $f_0 = 2 MHz$, 码片宽度 $T_c = 32 T_s$, f_c 为信号的循环频率, SNR 为回波信号信噪比,理论精度单位为 T_s .由表 1 可看出,双循环频率估计子组的估计性能确实要优于组成估计子组的单循环频率估计子.其中, $2f_0, 1/T_c, 2/T_c$ 都是 BPSK 的循环频率,详细的分析说明见文献[1,5].

表 1 对 BPSK 信号的单循环频率估计子与双循环频率估计子组估计理论精度比较

$D = 18 T_s$	单循环频率估计子			双循环频率估计子组		
	$= 2f_0$	$= 1/T_c$	$= 2/T_c$	$= 2f_0 + 1/T_c$	$= 2f_0 + 2/T_c$	$= 1/T_c + 2/T_c$
SNR = 3dB	0.0083 T_s	0.0058 T_s	0.0030 T_s	0.0038 T_s	0.0024 T_s	0.0028 T_s
SNR = 0dB	0.0098 T_s	0.0078 T_s	0.0040 T_s	0.0055 T_s	0.0031 T_s	0.0045 T_s
SNR = - 3dB	0.0155 T_s	0.016 T_s	0.0065 T_s	0.0077 T_s	0.0041 T_s	0.0061 T_s
SNR = - 6dB	0.0259 T_s	0.0176 T_s	0.0091 T_s	0.0125 T_s	0.0061 T_s	0.0077 T_s

4 仿真分析

以下对多循环频率循环估计子组的估计性能进行仿真分析,并与单循环频率循环估计子估计性能进行比较.仿真对象为 BPSK 和 QPSK 信号, Monte-Carlo 模拟次数为 10000,其他参数设置同上. BPSK 和 QPSK 的循环平稳特性分析参见文献 [1, 5]. 其中,仿真图例中的 α 表示循环估计子(组)所选择的循环频率.

仿真中使用了平稳高斯白噪声和时变高斯白噪声两种噪声模型,其中慢变化时变高斯白噪声信号模型参考了文献 [9] 的噪声模型,该白噪声的方差是一个高斯分布变量的平方.用 N 表示时变高斯噪声的方差,且该方差的均值为 $u_N = E[N]$,衡量时变噪声变化快慢的量是方差偏移系数,用 α 表示,定义为 $\alpha = (E[N^2] - u_N^2) / u_N^2$. $\alpha = 0$ 对应平稳高斯白噪声信号模型, $\alpha > 0$ 对应时变高斯白噪声模型.在以下仿真试验中时变高斯噪声的方差偏移系数 α 取为 0.1.

图 1 给出了平稳高斯白噪声背景对 BPSK 和 QPSK 信号时延估计理论精度与仿真精度的比较.仿真结果显示,在较高信噪比时 ($\text{SNR} > -6 \text{ dB}$) 根据理论推导计算得到的理论估计精度与仿真精度基本上是一致的,这说明了文章理论分析的正确性;而在信噪比降低时,理论精度与仿真精度差距逐渐变大,这是因为在低信噪比条件时推导估计理论精度的前提条件(信噪比足够高以忽略高阶干扰项的影响)已不再成立,高阶干扰项开始起主要作用.

图 2 给出了两种不同噪声背景下三循环频率循环估计子组对 BPSK 信号时延估计的仿真精度.仿真结果显示,时变噪声背景下估计精度较平稳噪声背景要略有下降,但这种下降并不是很明显,说明多循环频率循环时延估计方法是一种稳健的估计算法.

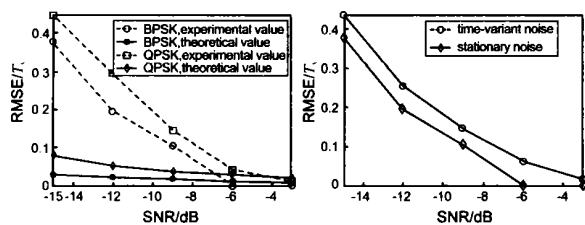


图 1 对 BPSK 和 QPSK 信号时延估计的理论精度与仿真精度比较;虚线表示仿真实验精度,实线表示理论精度

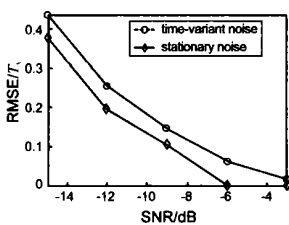


图 2 平稳高斯白噪声和慢变化时变高斯白噪声背景下对 BPSK 信号时延估计的仿真精度比较

图 3 给出了不同噪声背景下对 BPSK 信号时延估计的多循环频率估计子组与单循环频率估计子的性能比较,噪声背景主要指平稳高斯白噪声和慢变化时变高斯白噪声.其中多循环频率主要包括两种,分别是双循环频率估计子组和三

循环频率估计子组.由仿真结果可看出,三循环频率循环估计子组性能要优于双循环频率循环估计子组,而双循环频率循环估计子组性能要优于单循环频率循环估计子.该仿真说明,充分利用信号循环平稳特征的多循环频率循环估计子组性能确实要好,这与理论分析的结论是一致的.

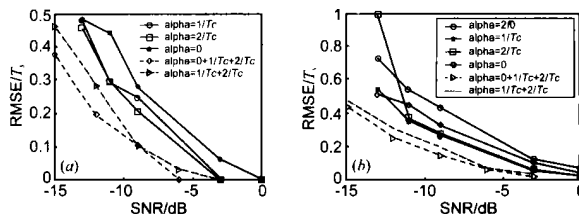


图 3 不同噪声模型下对 BPSK 信号时延估计的多循环频率估计子组与单循环频率估计子精度比较; (a) 平稳高斯白噪声背景; (b) 时变高斯白噪声背景

图 4 给出了平稳高斯白噪声和慢变化时变高斯白噪声背景下对 QPSK 信号时延估计的三循环频率循环估计子组与单循环频率估计子的性能比较.很明显,三循环频率循环估计子组估计性能要优于单循环频率循环估计子的估计性能.

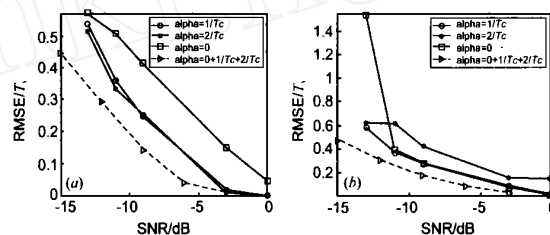


图 4 不同噪声模型下对 QPSK 信号时延估计的多循环频率估计子组与单循环频率估计子精度比较; (a) 平稳高斯白噪声背景; (b) 时变高斯白噪声背景

5 总结

已有的单循环频率循环估计子由于只利用了循环平稳信号单个循环频率的特征信息,并且估计性能对循环频率的选择有较大的依赖性,使得单循环频率估计子在实际使用中受到了较大的局限性.为解决该问题,文章研究并首次给出了多循环频率循环时延估计方法,还对均方误差进行了严格推导,得到了理论估计精度的解析表达式.在平稳高斯白噪声和慢变化时变高斯白噪声条件下对 BPSK 和 QPSK 信号的仿真结果表明,较高信噪比时 ($\text{SNR} > -6 \text{ dB}$) 循环估计子组的估计理论精度与仿真精度基本上是一致的,并且三循环频率循环估计子组估计性能要优于双循环频率循环估计子组,而双循环频率循环估计子组的估计性能要优于单循环频率循环估计子.仿真结果充分说明了文章理论分析的正确性,也说明了多循环频率循环时延估计方法的有效性及其估计子组的稳健性.

附录:双循环频率循环估计精度详细推导

由式(8)知道

$$|C_{y,x}(u)|^2 = \prod_{i=1,2} \left[ae^{-j \cdot i^D} s^i(u-D) + \hat{n}^i(u) \right] \left\{ \prod_{i=1,2} \left[ae^{-j \cdot i^D} s^i(u-D) + \hat{n}^i(u) \right] \right\}^* \quad (16)$$

化简后有

$$|C_{y,x}(u)|^2 = \prod_{i=1,2} \left[a^2 e^{j(i^2 - i^D) s^i(u-D)} + \left(s^i(u-D) \right)^* + ae^{-j \cdot i^D} s^i(u-D) \left(\hat{n}^i(u) \right)^* \right] \left[a^2 e^{j(i^2 - i^D) s^i(u-D)} + \left(s^i(u-D) \right) + ae^{-j \cdot i^D} s^i(u-D) \left(\hat{n}^i(u) \right) \right] \quad (17)$$

为简化问题的推演,假定信杂比高,使得噪声乘积项可忽略(这意味着推导结果只适用于高信杂比情况),并且对上式展开后可得

$$|C_{y,x}(u,0)|^2 = a^2 |s^1(u-D)|^2 + a^2 |s^2(u-D)|^2 + 2\text{Re} \left\{ a^2 e^{j(2^2 - 1^D) s^1(u-D)} \left(s^2(u-D) \right)^* \right\} + 2\text{Re} \left\{ ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right\} + 2\text{Re} \left\{ ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right\} + 2\text{Re} \left\{ ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right\} + 2\text{Re} \left\{ ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right\} \quad (18)$$

计算上式的微分得到

$$\frac{\partial |C_{y,x}(u,0)|^2}{\partial u} = a^2 \frac{\partial}{\partial u} \left\{ |s^1(u-D)|^2 + |s^2(u-D)|^2 + 2\text{Re} \left[e^{j(2^2 - 1^D) s^1(u-D)} \left(s^2(u-D) \right)^* \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial u} \left\{ 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] \right\} \quad (19)$$

对式(19)右边第一个微分在 $u=D$ 处做一阶泰勒级数展开,有

$$a^2 \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ |s^1(u-D)|^2 + |s^2(u-D)|^2 + 2\text{Re} \left[e^{j(2^2 - 1^D) s^1(u-D)} \left(s^2(u-D) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D} + a^2 \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ |s^1(u-D)|^2 + |s^2(u-D)|^2 + 2\text{Re} \left[e^{j(2^2 - 1^D) s^1(u-D)} \left(s^2(u-D) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D} + a^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left\{ |s^1(u-D)|^2 + |s^2(u-D)|^2 + 2\text{Re} \left[e^{j(2^2 - 1^D) s^1(u-D)} \left(s^2(u-D) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D} (D-D) = a^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left\{ |s^1(u-D)|^2 + |s^2(u-D)|^2 + 2\text{Re} \left[e^{j(2^2 - 1^D) s^1(u-D)} \left(s^2(u-D) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D} (D-D) \quad (20)$$

对式(19)右边第二个微分在 $u=D$ 处做泰勒级数展开,并且只取第一项近似有

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D} \quad (21)$$

将式(20)、(21)结果代入到式(15),可以得到估计值与真值之差为

$$D-D = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D}}{a^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left\{ |s^1(u-D)|^2 + |s^2(u-D)|^2 + 2\text{Re} \left[e^{j(2^2 - 1^D) s^1(u-D)} \left(s^2(u-D) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D}} \quad (22)$$

由于信号与噪声是统计独立的,且噪声在循环频率 ω_1, ω_2 处是不存在谱相关特性的,因此,对上式左右两边取均值显然有 $E[D-D] = 0$ (23)

这说明式(15)给出的估计是无偏的.为便于区分不同循环频率循环估计子组的估计精度,用 σ_{D2}^2 表示两循环频率循环估计子组的估计方差,则

$$\sigma_{D2}^2 = E[D-D]^2 = E \left\{ \left[\frac{\left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 1^D} s^1(u-D) \left(\hat{n}^2(u) \right)^* \right] + 2\text{Re} \left[ae^{-j \cdot 2^D} s^2(u-D) \left(\hat{n}^1(u) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D}}{a^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left\{ |s^1(u-D)|^2 + |s^2(u-D)|^2 + 2\text{Re} \left[e^{j(2^2 - 1^D) s^1(u-D)} \left(s^2(u-D) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D}} \right]^2 \right\} \quad (24)$$

上式形式较为复杂,下面对其化简.化简过程分两步完成,分别对分子和分母进行化简,先考虑对分母的化简.

$$\text{由于} \quad R_{s^1}(u-D) \left[R_{s^2}(u-D) \right]^* = \iint_{(\cdot, \cdot)} R_{s^1}(1-D) R_{s^2}(2-u) \left[R_{s^1}(1-u) R_{s^2}(2-D) \right]^* d_1 d_2 \quad (25)$$

并且

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[R_{s^2}(2-u) \left[R_{s^1}(1-u) \right]^* \right] &= R_{s^2}(2-u) \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[R_{s^1}(1-u) \right]^* + \left[R_{s^1}(1-u) \right]^* \frac{\partial^2}{\partial u^2} R_{s^2}(2-u) \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial u} R_{s^2}(2-u) \frac{\partial}{\partial u} \left[R_{s^1}(1-u) \right]^* \end{aligned} \quad (26)$$

又因为

$$\begin{aligned} &\left\{ \iint_{(\cdot, \cdot)} R_{s^1}(1-D) \left[R_{s^2}(2-D) \right]^* \frac{\partial}{\partial u} \left[R_{s^1}(1-u) \right]^* \frac{\partial}{\partial u} R_{s^2}(2-u) d_2 d_1 \right\}_{u=D} \\ &= \left\{ \iint_{(\cdot, \cdot)} R_{s^1}(1-D) \left[R_{s^2}(2-D) \right]^* \iint_{(\cdot, \cdot)} 4^2 f_1 f_2 S_{s^2}(f_2) \left[S_{s^1}(f_1) \right]^* e^{-j^2 f_1(1-u)} e^{j^2 f_2(2-u)} df_1 df_2 d_2 d_1 \right\}_{u=D} \\ &= 4^2 \iint_{(\cdot, \cdot)} f_1 f_2 |S_{s^2}(f_2)|^2 |S_{s^1}(f_1)|^2 df_1 df_2 \\ &= 4^2 \iint_{(\cdot, \cdot)} |f| |S_{s^1}(f)|^2 df \quad |f| |S_{s^2}(f)|^2 df \end{aligned} \quad (27)$$

并且

$$\begin{aligned} &\left\{ \iint_{(\cdot, \cdot)} R_{s^1}(1-D) \left[R_{s^2}(2-D) \right]^* \left[R_{s^1}(1-u) \right]^* \frac{\partial^2}{\partial u^2} R_{s^2}(2-u) d_2 d_1 \right\}_{u=D} \\ &= \iint_{(\cdot, \cdot)} |R_{s^1}(1-D)|^2 d_1 \left\{ \left[R_{s^2}(2-D) \right]^* \frac{\partial^2}{\partial u^2} R_{s^2}(2-u) d_2 \right\}_{u=D} \\ &= -s^1(0) \left\{ \iint_{(\cdot, \cdot)} \left[S_{s^2}(f_1) \right]^* e^{-j^2 f_1(2-D)} df_1 4^2 f_2^2 S_{s^2}(f_2) e^{j^2 f_2(2-u)} df_2 d_2 \right\}_{u=D} \\ &= -4^2 s^1(0) \iint_{(\cdot, \cdot)} f_2^2 \left[S_{s^2}(f_1) \right]^* S_{s^2}(f_2) e^{j^2 (f_2-f_1)(2-D)} df_1 df_2 d_2 \\ &= -4^2 s^1(0) \iint_{(\cdot, \cdot)} |f|^2 |S_{s^2}(f)|^2 df \end{aligned} \quad (28)$$

同理有

$$\begin{aligned} &\left\{ \iint_{(\cdot, \cdot)} R_{s^1}(1-D) \left[R_{s^2}(2-D) \right]^* R_{s^2}(2-u) \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[R_{s^1}(1-u) \right]^* d_2 d_1 \right\}_{u=D} \\ &= \iint_{(\cdot, \cdot)} |R_{s^2}(2-D)|^2 d_1 \left\{ \left[R_{s^1}(1-D) \right]^* \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left[R_{s^1}(1-u) \right]^* d_2 \right\}_{u=D} \\ &= -s^2(0) \left\{ \iint_{(\cdot, \cdot)} \left[S_{s^1}(f_1) \right]^* e^{-j^2 f_1(2-D)} df_1 4^2 f_2^2 S_{s^1}(f_2) e^{j^2 f_2(2-u)} df_2 d_2 \right\}_{u=D} \\ &= -4^2 s^2(0) \iint_{(\cdot, \cdot)} f_2^2 \left[S_{s^1}(f_1) \right]^* S_{s^1}(f_2) e^{j^2 (f_2-f_1)(2-D)} df_1 df_2 d_2 \\ &= -4^2 s^2(0) \iint_{(\cdot, \cdot)} |f|^2 |S_{s^1}(f)|^2 df \end{aligned} \quad (29)$$

于是由式(26)~(29)知道

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} \text{Re} \left[e^{j(2-1)D} s^i(u-D) \left[s^i(u-D) \right]^* \right] \right\}_{u=D} = 4^2 \cos[(2-1)D] \times \\ &\left[2 \iint_{(\cdot, \cdot)} |f| |S_{s^1}(f)|^2 df \quad |f| |S_{s^2}(f)|^2 df - s^1(0) \iint_{(\cdot, \cdot)} |f|^2 |S_{s^2}(f)|^2 df - s^2(0) \iint_{(\cdot, \cdot)} |f|^2 |S_{s^1}(f)|^2 df \right] \end{aligned} \quad (30)$$

并且由式(30)知道

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} |s^1(u-D)|^2 \right\}_{u=D} = 8 \left[\iint_{(\cdot, \cdot)} |f| |S_{s^1}(f)|^2 df - s^1(0) \iint_{(\cdot, \cdot)} |f|^2 |S_{s^1}(f)|^2 df \right] \quad (31)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} |s^2(u-D)|^2 \right\}_{u=D} = 8 \left[\iint_{(\cdot, \cdot)} |f| |S_{s^2}(f)|^2 df - s^2(0) \iint_{(\cdot, \cdot)} |f|^2 |S_{s^2}(f)|^2 df \right] \quad (32)$$

令 B_i^2 表示谱相关函数 $|S_{s^i}(f)|^2$ 的二阶中心矩, \bar{f}_i 表示 $|S_{s^i}(f)|^2$ 的一阶原点矩, $s^i(0)$ 为循环相关函数 $R_{s^i}(\cdot)$ 的能量, 则

$$s^i(0) \triangleq \iint_{(\cdot, \cdot)} |R_{s^i}(\cdot)|^2 d = \iint_{(\cdot, \cdot)} |S_{s^i}(f)|^2 df, \quad i=1, 2, \dots \quad (33)$$

$$\bar{f}_i \triangleq \frac{\int |S_{s^i}(f)|^2 df}{s^i(0)}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{34}$$

$$B_i^2 \triangleq \frac{\int (f - \bar{f}_i)^2 |S_{s^i}(f)|^2 df}{s^i(0)}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{35}$$

利用式(30)~(35)的结果,式(24)分母可简化成下面的形式

$$\left\{ a^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left\{ |s^1(u-D)|^2 + |s^2(u-D)|^2 + 2\text{Re} \left[e^{j(\omega_2 - \omega_1)D} s^1(u-D) \left(s^2(u-D) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D} \right\}^2 = 64 a^4 \left\{ s^1(0) B_1^2 \left[s^1(0) + s^2(0) \cos((\omega_2 - \omega_1)D) \right] + s^2(0) B_2^2 \left[s^2(0) + s^1(0) \cos((\omega_2 - \omega_1)D) \right] + s^1(0) s^2(0) \cos((\omega_2 - \omega_1)D) \left(\bar{f}_1 - \bar{f}_2 \right)^2 \right\}^2 \tag{36}$$

下面对式(24)分子进行化简.由于

$$\left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \left[a e^{-j\omega_1 D} s^1(u-D) \left(\hat{r}(u) \right)^* \right] + \left[a e^{-j\omega_2 D} s^2(u-D) \left(\hat{r}(u) \right)^* \right] \right\} \right]_{u=D} + \left[a e^{-j\omega_1 D} s^1(0) \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} + a e^{-j\omega_2 D} s^2(0) \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} + a e^{-j\omega_1 D} s^1(0) \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} + a e^{-j\omega_2 D} s^2(0) \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} \right] = a \left[e^{-j\omega_1 D} s^1(0) + e^{-j\omega_2 D} s^2(0) \right] \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} \right\} \tag{37}$$

从而有

$$2\text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ a e^{-j\omega_1 D} s^1(u-D) \left(\hat{r}(u) \right)^* + a e^{-j\omega_2 D} s^2(u-D) \left(\hat{r}(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} + a e^{-j\omega_1 D} s^1(0) \left(\hat{r}(u) \right)^* + a e^{-j\omega_2 D} s^2(0) \left(\hat{r}(u) \right)^* \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} \right\} + a \left[e^{-j\omega_1 D} s^1(0) + e^{-j\omega_2 D} s^2(0) \right] \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\hat{r}(u) \right)^* \right]_{u=D} \right\} \tag{38}$$

于是

$$\left\{ 2\text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ a e^{-j\omega_1 D} s^1(u-D) \left(\hat{r}(u) \right)^* + a e^{-j\omega_2 D} s^2(u-D) \left(\hat{r}(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} + a e^{-j\omega_1 D} s^1(0) \left(\hat{r}(u) \right)^* + a e^{-j\omega_2 D} s^2(0) \left(\hat{r}(u) \right)^* \right\}^2 = 4 a^2 \left[\left(s^1(0) \right)^2 + \left(s^2(0) \right)^2 + 2\cos((\omega_2 - \omega_1)D) s^1(0) s^2(0) \right] \times \left\{ E \left[\left| \frac{\partial}{\partial u} \hat{r}(u) \right|^2 \right]_{u=D} + E \left[\left| \frac{\partial}{\partial u} \hat{r}(u) \right|^2 \right]_{u=D} \right\} \tag{39}$$

从而有下式成立

$$\left\{ 2\text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left\{ a e^{-j\omega_1 D} s^1(u-D) \left(\hat{r}(u) \right)^* + a e^{-j\omega_2 D} s^2(u-D) \left(\hat{r}(u) \right)^* \right\} \right]_{u=D} + a e^{-j\omega_1 D} s^1(0) \left(\hat{r}(u) \right)^* + a e^{-j\omega_2 D} s^2(0) \left(\hat{r}(u) \right)^* \right\}^2 = 16 a^2 \left[\left(s^1(0) \right)^2 + \left(s^2(0) \right)^2 + 2\cos((\omega_2 - \omega_1)D) s^1(0) s^2(0) \right] \times \left[K_1 \int |s^1(f)|^2 df + K_2 \int |s^2(f)|^2 df \right] = 16 a^2 \left[\left(s^1(0) \right)^2 + \left(s^2(0) \right)^2 + 2\cos((\omega_2 - \omega_1)D) s^1(0) s^2(0) \right] \times \left[K_1 s^1(0) \left(B_1^2 + \bar{f}_1^2 \right) + K_2 s^2(0) \left(B_2^2 + \bar{f}_2^2 \right) \right] \tag{40}$$

其中, K_1 和 K_2 表示分别取循环频率为 ω_1 和 ω_2 时近似白噪声 $\hat{r}(u)$ 、 $\hat{r}(u)$ 的功率谱密度,且

$$K_1 = k_i N_0 / (2T) \tag{41}$$

而 k_i 是信号 $s(t) e^{-j\omega_i t}$ 功率谱等效成矩形时的矩形幅度^[5], T 为信号积累时间长度, $N_0/2$ 是白噪声的功率谱密度.

将式(36)、(40)结果带入到式(24)可得到对时延的估计均方差为

$$\frac{2}{B_2} \frac{\left[\left(s^1(0) \right)^2 + \left(s^2(0) \right)^2 + 2\cos((\omega_2 - \omega_1)D) s^1(0) s^2(0) \right] \times \left[K_1 s^1(0) \left(B_1^2 + \bar{f}_1^2 \right) + K_2 s^2(0) \left(B_2^2 + \bar{f}_2^2 \right) \right]}{4 a^2 \left\{ s^1(0) B_1^2 \left[s^1(0) + s^2(0) \cos((\omega_2 - \omega_1)D) \right] + s^2(0) B_2^2 \left[s^2(0) + s^1(0) \cos((\omega_2 - \omega_1)D) \right] + s^1(0) s^2(0) \cos((\omega_2 - \omega_1)D) \left(\bar{f}_1 - \bar{f}_2 \right)^2 \right\}^2} \tag{42}$$

上式中当取 $\omega_1 = \omega_2$ 时,双循环频率循环估计子组退化为单循环频率循环估计子,并且其估计精度为

$$\frac{2}{D} \frac{K_1 \left(B^2 + \bar{f}^2 \right)}{8 \alpha^2 s^1(0) B^4} \quad (43)$$

同样的推导过程可求得三循环频率循环估计子组的估计均方误差 σ_{D3}^2 为

$$\sigma_{D3}^2 = \frac{3 \prod_{i=1,2,3} K_i s^i(0) \left(B^2 + \bar{f}_i^2 \right) \left[\prod_{i=1,2,3} \left(s^i(0) \right)^2 + 2 \cos \left(\left(\omega_2 - \omega_1 \right) D \right) s^1(0) s^2(0) \right.}{8 \alpha^2 \left[\prod_{i=1,2,3} s^i(0) B^2 + 2 \cos \left(\left(\omega_2 - \omega_1 \right) D \right) s^1(0) s^2(0) + 2 \cos \left(\left(\omega_2 - \omega_1 \right) D \right) s^3(0) s^2(0) \right]} \quad (44)$$

$$+ \prod_{i=1,2,3} s^i(0) \cos \left(\left(\omega_i - \omega_1 \right) D \right) + s^{2(0)} B^2 \prod_{i=1,2,3} s^i(0) \cos \left(\left(\omega_i - \omega_2 \right) D \right)$$

$$+ \prod_{i=1,2,3} s^i(0) B^2 \prod_{i=1,2,3} s^i(0) \cos \left(\left(\omega_i - \omega_3 \right) D \right) + s^1(0) s^2(0) \cos \left(\left(\omega_2 - \omega_1 \right) D \right) \left(\bar{f}_1 - \bar{f}_2 \right)^2$$

$$+ \prod_{i=1,2,3} s^i(0) s^3(0) \cos \left(\left(\omega_3 - \omega_1 \right) D \right) \left(\bar{f}_1 - \bar{f}_3 \right)^2 + \prod_{i=1,2,3} s^i(0) s^2(0) \cos \left(\left(\omega_2 - \omega_3 \right) D \right) \left(\bar{f}_3 - \bar{f}_2 \right)^2 \Big]^2$$

参考文献:

- [1] W A Gardner. Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals [J]. IEEE ASSP Magazine, 1991, 8(4): 14 - 36.
- [2] W A Gardner, C - K Chen. Signal-selective time-difference-of-arrival estimation for passive location of man-made signal sources in highly corruptive environments, part 1: Theory and method [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1992, 40(5): 1168 - 1184.
- [3] W A Gardner, C - K Chen. Signal-selective time-difference-of-arrival estimation for passive location of man-made signal sources in highly corruptive environments, part 2: Algorithms and performance [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1992, 40(5): 1185 - 1197.
- [4] Zhitao HUANG, Yiyu ZHOU, Wenli JIANG, Qizhong LU. Joint estimation of Doppler and time-difference-of-arrival exploiting cyclostationary property [J]. IEE Proc - Radar Sonar Navig, 2002, 149(4): 161 - 165.
- [5] 黄知涛, 周一宇, 姜文利. 循环相关匹配滤波器设计 [J]. 电子学报, 2002, 30(12): 122 - 126.
- [6] Zhitao HUANG, Weihua WANG, Yiyu ZHOU, Wenli JIANG. Asymptotic analysis of estimated cyclic cross-correlation function between stationary and cyclostationary processes [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2003, 14(3): 87 - 91.
- [7] 黄知涛, 周一宇, 姜文利. 基于循环平稳特性的源信号到达角估计方法 [J]. 电子学报, 2002, 30(3): 372 - 375.
- [8] 黄知涛, 姜文利, 卢启中, 周一宇. 基于调频广播信号的动目标时差提取方法 [J]. 电子学报, 2001, 29(12): 1597 - 1600.
- [9] W A Gardner, C M Spooner. Signal interception: Performance advantages of cyclic-feature detectors [J]. IEEE Transactions on Communications, 1992, 40(1): 149 - 159.

作者简介:



黄知涛 男, 1976 年 9 月生于湖北荆州, 博士研究生, 已发表论文 20 余篇, 研究方向为: 循环平稳信号处理理论、雷达信号处理、雷达数据处理及无源探测、定位理论与技术等。



姜文利 男, 1967 年 10 月生于山东烟台, 博士, 副教授, 已发表论文 30 余篇, 研究方向为: 信号处理、综合电子战等。

周一宇 男, 1948 年 10 月生于上海, 博士, 教授, 博士生导师, 电子学会电子对抗分会委员, 航空学会电子分会雷达与制导专业委员会委员, 出版专著两部, 发表论文 60 余篇, 重点研究方向为: 综合电子战系统理论、无源定位理论与技术、雷达数据处理、电子信息系统仿真等。